

Rot-schwarze Bäume

Rot-schwarze Bäume sind eine einfachere Form balancierter binärer Bäume. In rot-schwarzen Bäumen haben die Knoten ein, zwei oder drei Nachfolgeknoten. Dadurch kann man einen beliebigen Knoten immer leicht erweitern. Implementiert werden rot-schwarze Bäume mit binären Bäumen, in denen die Knoten gefärbt sind (nämlich rot oder schwarz). Jeweils zwei oder drei solche gefärbter Knoten entsprechen dann einem Knoten im abstrakten rot-schwarzen Baum.

Aufgabe

1. Definieren Sie rot-schwarze Bäume als predikativen Teiltyp eines geeigneten Typs für binäre Bäume.
2. Definieren Sie Funktionen zum Einfügen, Löschen und Suchen in rot-schwarzen Suchbäumen.
3. Beweisen Sie, dass diese Funktionen die entsprechenden Invarianten erhalten (der Baum bleibt ein rot-schwarzer Suchbaum).
4. Es ist ausreichend rot-schwarze Bäume über natürlichen Zahlen zu betrachten.